Pergamon

Appl. Math. Lett. Vol. 7, No. 5, pp. 89–92, 1994

0893-9659/94 $7.00 + 0.00

0893-9659(94)00078-6

Ecoulement Potentiel d'un Fluide Compressible Visqueux Isotherme

D. SERRE*
Ecole Normale Supérieure de Lyon, UMPA-UMR 128
46, allée d'Italie, 69364 Lyon, cedex 07, France

(Received November 1993; accepted December 1993)

Abstract—One finds, by means of solutions of a Hamilton-Jacobi equation, certain potential flows of a compressible isothermal viscous fluid. These special solutions of the Navier-Stokes equation are global in space and time if the space dimension d equals 1. They are only local in space and time, otherwise.

Keywords—Viscous flow, Potential, Hamilton-Jacobi equations.

1. L'EQUATION DE HAMILTON-JACOBI

Considérons les équations de Navier-Stokes qui gouvernent l'évolution de la densité $\rho(x,t)$ et la vitesse $u(x,t)$ d'un fluide isotherme dans un domaine Q de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1}$$
$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + c^2 \nabla \rho = (\gamma + \lambda)\Delta u + \gamma \nabla \operatorname{div} u. \tag{2}$$

Les constantes c, γ, λ sont positives et représentent la vitesse du son ainsi que les coefficients de Lamé. On cherche des solutions particulières dont le champ de vitesses dérive d'un potentiel, $u = \nabla f$, et dont la pression équilibre les contraintes dues à la viscosité: $\rho = \alpha \Delta f$ avec $\alpha = c^{-2}(2\gamma + \lambda)$.

Les équations (1) et (2) se réduisent alors, en supposant que l'écoulement est assez régulier, à:

$$\Delta f_t + \operatorname{div}(\Delta f \, \nabla f) = 0, \tag{3}$$
$$\nabla \left(f_t + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \right) = u_t + (u \cdot \nabla) u = 0. \tag{4}$$

Le potentiel n'étant défini par l'écoulement qu'à l'addition d'un fonction du temps près, on peut fixer son évolution en intégrant (4) sous la forme d'une l'équation de Hamilton-Jacobi:

$$f_t + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 = 0. \tag{5}$$

Le système à résoudre se compose alors de (5) et de:

$$\Delta \left(\frac{1}{2}|\nabla f|^2 \right) = \operatorname{div}(\Delta f \, \nabla f),$$

*Membre de l'Institut Universitaire de France.

c'est-à-dire de

$$\sum_{i,j,=1}^{d} (\partial_i \partial_j f)^2 = (\Delta f)^2. \tag{6}$$

La dernière équation est triviale si $d = 1$. On peut vérifier que si $d = 2$, elle est compatible avec l'équation de Hamilton-Jacobi, c'est-à-dire que si $f(\cdot, t = 0)$ satisfait (6), alors la solution de (5) continue de satisfaire (6) tant qu'elle est régulière. Cependant, pour $d \geq 3$, la compatibilité de (6) et (5) est en défaut. Plus précisément, l'égalité (6), qui s'écrit aussi $\mathrm{Tr}(M^2) = (\mathrm{Tr}\, M)^2$ pour $M := D_x^2 f$, n'est préservée par le flot de (5) que si de plus $\mathrm{Tr}(M^3) = (\mathrm{Tr}\, M)^3$. De même, cette nouvelle équation n'est préservée par le flot de (5) que si de plus $\mathrm{Tr}(M^4) = (\mathrm{Tr}\, M)^4$. Par récurrence on en déduit la liste des conditions de compatibilité:

$$\mathrm{Tr}(M^k) = (\mathrm{Tr}\, M)^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui équivaut au fait que 0 soit valeur propre pour M de multiplicité $d-1$ ou d. Comme M est une matrice symétrique, donc diagonalisable, il revient au même de dire que le rang de $M(x,t)$ est partout au plus égal à 1.

Réciproquement, si le rang de $D^2 f_0(x)$, où f_0 est une condition initiale régulière, est partout au plus égal à 1, alors cela reste vrai pour la solution de (5) tant que celle-ci est régulière. Précisons ce fait quantitativement dans le cas qui nous intéresse, celui où $\Delta f_0 \geq 0$ (pour assurer que $\rho_0 \geq 0$ puisque c'est une densité de masse). Cette inégalité et l'hypothèse montrent qu'il existe un champ de vecteurs (unique au signe près) $n(x)$ tel que $D^2 f_0(x) = n(x) \otimes n(x)$. Ainsi $D^2 f_0 \geq 0$: f_0 est convexe. Ecrivons alors f_0 comme le supremum de ses fonctions affines tangentes:

$$f_0(x) = \sup \left\{ \nabla f_0(y) \cdot (x - y) + f_0(y);\ y \in D \right\},$$

où D est le domaine (convexe) de définition de f_0. L'hypothèse sur le rang de $D^2 f_0$ signifie que le graphe de f_0 est *développable* sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que les espaces tangents au graphe de f_0 en deux points $y + V$ et y, tels que $n(y) \cdot V = 0$, sont égaux. On peut donc, sans changer la valeur de f_0, réduire le supremum en ne gardant que les points y d'une courbe Γ (qui n'est jamais normale au champ de vecteurs n). Enfin la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, tant qu'elle est régulière, est donnée par la formule

$$f(x,t) = \sup \left\{ \nabla f_0(y) \cdot (x - y) + f_0(y) - \frac{t}{2} |\nabla f_0(y)|^2;\ y \in \Gamma \right\}.$$

Ceci montre que le graphe de $f(\cdot, t)$ est l'enveloppe d'une famille à *un* paramètre d'hyperplans, donc est développable. La condition de rang 1 est donc satisfaite. De plus, f est convexe, de sorte que $\rho = \alpha \Delta f \geq 0$ est bien une densité. En résumé:

THÉORÈME 1.1. *Soit $l_y : x \mapsto q(y) \cdot x + b(y)$ une famille à un paramètre de fonctions affines, dépendant régulièrement de $y \in I$. Soit D un domaine convexe sur lequel la fonction convexe $f_0(x) =: \sup\{l_y(x);\ y \in I\}$ est de classe C^2. Alors l'équation de Hamilton-Jacobi (5) possède une solution locale de classe C^2 satisfaisant $f(x, 0) = f_0(x)$. De plus $f(\cdot, t)$ est convexe et les formules $u = \nabla f$, $\rho = \alpha \Delta f$ définissent une solution des équations de Navier-Stokes (1) et (2).*

2. LE CAS DE LA DIMENSION $d = 1$

Ici, la condition (6) est triviale, tandis que l'équation de Hamilton-Jacobi possède une et une seule solution régulière globale f pour $t > 0$ dès que f_0 est convexe, même si f_0 n'est que localement Lipschitzienne. Il s'agit de la solution de viscosité (voir [1] pour cette notion), donnée par la formule de Lax:

$$f(x,t) = \inf \left\{ f_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t};\ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

En résumé, étant donnée une densité initiale $\rho_0 \geq 0$, il existe un champ de vitesses (unique à une constante additive près) u_0, fourni par $\alpha u_0' = \rho_0$, tel que l'écoulement correspondant soit potentiel et vérifie en permanence $\alpha \partial_x u = \rho$. On a $u = \partial_x f$ où f est une fonction convexe, solution de (5).

Le fait que la donnée initiale puisse être Lipschitzienne autorise que la masse initiale soit concentrée en certains points. On a ainsi un phénomène du type "big-bang," où la masse initiale, concentrée en un point, s'étale sur la droite dès que $t > 0$. Ici,

$$f_0(x) = \begin{cases} ax, & x < 0, \\ bx, & x > 0, \end{cases}$$

où $a < b$ sont deux constantes. La masse totale, concentrée à l'origine, est $m = \alpha(b - a)$. La solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi est

$$f(x,t) = \begin{cases} ax - \dfrac{a^2}{2}t, & x < at, \\ \dfrac{x^2}{2t}, & at < x < bt, \\ bx - \dfrac{b^2}{2}t, & x > bt. \end{cases}$$

La masse est donc, à l'instant t, répartie de manière uniforme sur son support $[at, bt]$ sur lequel la vitesse est affine. On peut constater que la condition de contrainte nulle à la surface libre a bien lieu (en fait, la contrainte $(2\mu + \lambda)\, u_x - c^2 \rho$ est nulle partout).

3. LE CAS $d \geq 2$

La situation est beaucoup moins favorable en dimension $d \geq 2$. En effet, f_0 ne peut à la fois être régulière et satisfaire la condition (6) que s'il existe une variable scalaire, disons x_1, telle que $f_0(x) = g(x_1)$ et ceci nous ramène au cas monodimensionnel. Par ailleurs, si f_0 est convexe, l'équation de Hamilton-Jacobi possède une et une seule solution régulière pour $t > 0$, toujours donnée par la formule de Lax

$$f(x,t) = \inf \left\{ f_0(y) + \frac{\|x - y\|^2}{2t};\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

mais celle-ci ne satisfait plus la condition (6) si f_0 a une singularité générale. Voyons sur un exemple, avec $f_0(x) = \|x\|$, qui est le candidat pour décrire un *big bang.* On a

$$f(x,t) = \begin{cases} \|x\| - \dfrac{t}{2}, & \|x\| > t, \\ \dfrac{\|x\|^2}{2t}, & \|x\| < t, \end{cases}$$

qui ne satisfait pas (6) dans la boule $B(0;t)$. L'explication de ce phénomène est que le sous-différentiel de f_0 à l'origine est un convexe d'intérieur non vide, donc de dimension 2, de sorte que la solution de viscosité (la seule qui soit régulière dans ce cas) est le supremum d'une famille à *deux* paramètres de fonctions affines.

Plus généralement, si f_0 est convexe, l'ensemble K des valeurs de son sous-différentiel est un convexe et la solution régulière de (5) est donnée par

$$f(x,t) = \sup \left\{ l(x) + c - \frac{t}{2}\|l\|^2;\ l + c \in K \right\}.$$

La condition de compatibilité n'est satisfaite que si K est lui-même un segment. Dans le cas ou f_0 possède une singularité en x_0, le sous-différentiel $\partial f_0(x_0)$ n'est pas réduit à un point et détermine donc la direction de K. Pour que la condition (6) soit satisfaite, il est nécessaire que la caustique passant par $(x_0, f(x_0))$ soit en fait incluse dans un hyperplan tangent en x_0 au graphe de f_0. Ceci limite considérablement l'intérêt de notre construction dans le cas multidimensionnel: les solutions obtenues sont ou bien locales en espace-temps, ou bien en fait monodimensionnelles.

COMMENTAIRE: L'ensemble des écoulements potentiels exacts décrit ici est manifestement très petit. En négligeant le terme convectif, Kazhikhov [2] obtient une classe plus large pour des lois de pression générales.

REFERENCES

1. P.-L. Lions, Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Pitman Research Notes in Mathematics*, No. 69, London, (1982).
2. A.V. Kazhikhov, The equations of potential flows of compressible viscous fluids at low Reynolds number, (preprint) (1993).